



TITLE:

# A characterization of extreme norms on $\mathbb{R}^2$ (Theory of operator means and related topics)

AUTHOR(S):

横山, 駿平; 斎藤, 吉助; 田中, 亮太郎

---

CITATION:

横山, 駿平 ...[et al]. A characterization of extreme norms on  $\mathbb{R}^2$  (Theory of operator means and related topics). 数理解析研究所講究録 2015, 1935: 1-5: KJ00009772899.

ISSUE DATE:

2015-04

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/223694>

RIGHT:

# A characterization of extreme norms on $\mathbb{R}^2$

新潟大学大学院・自然科学研究科 横山 駿平 (Shumpei Yokoyama)

Department of Mathematical Science,

Graduate School of Science and Technology, Niigata University

新潟大学・理学部 斎藤 吉助 (Kichi-Suke Saito)

Department of Mathematics, Faculty of Science, Niigata University

新潟大学大学院・自然科学研究科 田中 亮太郎 (Ryotaro Tanaka)

Department of Mathematical Science,

Graduate School of Science and Technology, Niigata University

## 1 序論

$\mathbb{R}^2$  上のノルム  $\|\cdot\|$  が absolute であるとは, 任意の  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  に対して  $\|(x, y)\| = \|(|x|, |y|)\|$  が成り立つことである. また  $\|\cdot\|$  が normalized であるとは,  $\|(1, 0)\| = \|(0, 1)\| = 1$  が成り立つことである.  $AN_2$  を  $\mathbb{R}^2$  上の absolute normalized norm 全体の集合とする.  $\|\cdot\|, \|\cdot\|' \in AN_2$  と任意の  $\lambda \in (0, 1)$  に対して  $\lambda\|\cdot\| + (1-\lambda)\|\cdot\|' \in AN_2$  が成り立つ. この意味で  $AN_2$  は凸構造を持つ. 1988 年に R. Grzaślewicz [4] は,  $AN_2$  のノルムが端点になることと, 単位球の端点が  $l_\infty^2$  の単位球面に含まれることが同値であることを示した.

Bonsall-Duncan [2] は,  $\mathbb{R}^2$  上の absolute normalized norm を凸関数によって次のように特徴づけた. つまり,  $\Psi_2$  を  $\max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1$  ( $t \in [0, 1]$ ) を満たす  $[0, 1]$  上の凸関数の集合とする. このとき  $\psi(t) = \|(1-t, t)\|$  で  $AN_2$  と  $\Psi_2$  は 1 対 1 に対応する. さらに, 任意の  $\psi, \psi' \in \Psi_2, \lambda \in (0, 1)$  に対して

$$\|\cdot\|_{(1-\lambda)\psi+\lambda\psi'} = (1-\lambda)\|\cdot\|_\psi + \lambda\|\cdot\|_{\psi'}$$

が成り立つ. これは凸構造を保存する事を意味する.

最近, 小室-斎藤-三谷 [9] は  $\Psi_2$  の観点から  $AN_2$  の端点を調べ,  $0 \leq \alpha \leq 1/2 \leq \beta \leq 1$  に対して,

$$\psi_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} 1-t & (t \in [0, \alpha]), \\ \frac{\alpha+\beta-1}{\beta-\alpha}t + \frac{\beta-2\alpha\beta}{\beta-\alpha} & (t \in [\alpha, \beta]), \\ t & (t \in [\beta, 1]). \end{cases}$$

とし, 凸解析的手法を用いることで  $\text{ext}(\Psi_2) = \{\psi_{\alpha,\beta} : 0 \leq \alpha \leq 1/2 \leq \beta \leq 1\}$  となる. つまり,  $\psi_{\alpha,\beta}$  の全体が  $AN_2$  の端点と同一視できることを示した.

上の 2 つの結果は, 背理法を基に示されている. つまり,  $l_\infty^2$  の単位球面に含まれない単位球の端点となる  $\|\cdot\| \in AN_2$  に対して  $\|\cdot\| = (\|\cdot\|' + \|\cdot\|'')/2$  を実際に構成している.

本論文では, まず斎藤-三谷-小室 [8] の結果を紹介する. その後, ミルマンの定理を用いることで Grzaślewicz と小室-斎藤-三谷の結果の直接的な証明が与えられることを示す.

## 2 $AN_2$ の端点の特徴づけ

この節では, 斎藤-三谷-小室 [8] の証明を紹介する. そのために, 次の補題を要する.

**Lemma 2.1.**  $\psi \in \Psi_2$  とし,  $\varphi = 2\psi - \psi_\infty$  とする.

(i)  $\psi'_R(1/2) \geq \psi'_L(1/2) + 1$  のとき,  $\varphi \in \Psi_2$  で,

$$\psi = \frac{\varphi + \psi_\infty}{2}.$$

となる.

(ii)  $\psi'_R(1/2) < \psi'_L(1/2) + 1$  のとき,  $\varphi \notin \Psi_2$  となる. しかし,  $s_0 \in [0, 1/2], t_0 \in (1/2, 1]$  に対して,  $\varphi_0 \in \Psi_2$  で

$$\varphi_0(t) = \begin{cases} \varphi(t) & (t \in [0, s_0] \cup [t_0, 1]), \\ \frac{\varphi(t_0) - \varphi(s_0)}{t_0 - s_0}t + \frac{\varphi(s_0)t_0 - \varphi(t_0)s_0}{t_0 - s_0} & (t \in [s_0, t_0]), \end{cases}$$

を見つけることができる. さらに,  $\varphi_{\max} = 2\psi - \varphi_0$  とおくと,  $\varphi_{\max} \in \Psi_2$  で

$$\psi = \frac{\varphi_0 + \varphi_{\max}}{2}$$

となる.

補題 2.1 を用いることで,  $AN_2$  の端点の特徴づけを得る.

**Theorem 2.2.**  $\psi \in \Psi_2$  とすると次は同値である.

- (i)  $\psi$  が  $\Psi_2$  の端点.
- (ii)  $\|\cdot\|_\psi$  が  $AN_2$  の端点.
- (iii)  $\psi = \psi_{\alpha,\beta}$  を満たす  $0 \leq \alpha \leq 1/2 \leq \beta \leq 1$  が存在する.

*Proof.* (i)  $\Leftrightarrow$  (iii) を見ればよい.  $\psi$  を  $\Psi_2$  の端点とする.  $\psi'_R(1/2) \geq \psi'_L(1/2) + 1$  のとき, 補題 2.1 より

$$\psi = \frac{\varphi + \psi_\infty}{2}, \psi = \varphi = \psi_\infty = \psi_{1/2, 1/2}$$

$\psi'_R(1/2) < \psi'_L(1/2) + 1$  のとき, 補題 2.1 より

$$\psi = \frac{\varphi_0 + \varphi_{\max}}{2}, \psi = \varphi_0 = \varphi_{\max}$$

となり,  $\psi = \psi_{s_0, t_0}$  を得る.

逆に,  $\psi = \psi_{\alpha, \beta}$  となる  $0 \leq \alpha \leq 1/2 \leq \beta \leq 1$  があるとする.

$$\psi_{\alpha, \beta} = \frac{1}{2}(\psi_1 + \psi_2), \psi_1, \psi_2 \in \Psi_2$$

のとき

$$\psi_{\alpha, \beta} = \psi_1 = \psi_2 \text{ } ([0, \alpha] \cup [\beta, 1])$$

である. 実際に, 任意の  $t \in [0, \alpha]$  に対して,  $\psi_{\alpha, \beta} = 1 - t$  で  $\max\{1 - t, t\} \leq \psi_1(t)$  である.

$$1 - t > \psi_1(t)$$

とすると

$$1 - t < \psi_2(t)$$

となり矛盾を生じる. したがって  $\psi_1 = \psi_2 = \psi_{\alpha, \beta}$  である.  $t \in [\beta, 1]$  の場合も同様に示せる. また, 任意の  $t \in [\alpha, \beta]$  に対して,

$$\psi_{\alpha, \beta}(t) = \frac{1}{2}(\psi_1(t) + \psi_2(t))$$

となり,  $\psi_1, \psi_2$  は凸関数より

$$\psi = \psi_1 = \psi_2.$$

よって,  $\psi_{\alpha, \beta}$  は  $\Psi_2$  の端点である. □

### 3 ミルマンの定理を用いた直接的な証明

$A$  をバナッハ空間の部分集合としたとき,  $\text{co}(A)$  と  $\overline{\text{co}}(A)$  をそれぞれ  $A$  の凸包と閉凸包とする.

以下では,  $E = \{\psi_{\alpha, \beta} : 0 \leq \alpha \leq 1/2 \leq \beta \leq 1\}$  とする. 証明の本質的な部分は  $\text{ext}(\Psi_2) \subset E$  を示すところである. また, これを示す上で次の定理が重要な役割を果たす.

**Theorem 3.1** (Milman の定理).  $X$  をバナッハ空間とし,  $K$  を  $\overline{\text{co}}(K)$  がコンパクトとなるような  $X$  のコンパクトな部分集合とすると,  $\text{ext}(\overline{\text{co}}(K)) \subset K$  を満たす.

このことから次を示せば十分である.

(i)  $\Psi_2$  が  $C[0, 1]$  でコンパクト,

(ii)  $E$  が  $\Psi_2$  の閉部分集合,

(iii)  $\Psi_2 = (\overline{\text{co}}(E))$ .

上が成り立つとき, ミルマンの定理の結果から直接的に  $\text{ext}(\Psi_2) \subset E$  を得る.

*Proof.* (i)  $\psi \in \Psi_2$  をとる.  $\|\psi\|_\infty = 1$  であり,  $\psi$  の凸性から, 任意の  $s, t \in [0, 1]$  に対して,

$$-1 \leq \psi'_R(0) \leq \frac{\psi(s) - \psi(t)}{s - t} \leq \psi'_L(1) \leq 1$$

が成り立つ. よって  $\psi$  は 1-リプシッツ連続である. したがって  $\Psi_2$  は一様有界かつ同程度連続であり, アスコリ・アルツェラの定理から  $\Psi_2$  は  $C[0, 1]$  で相対コンパクトである.

ここで,  $(\psi_n)$  を  $\psi \in C[0, 1]$  に収束する  $\Psi_2$  の点列とすると, 任意の  $s, t \in [0, 1], \lambda \in (0, 1)$  に対して

$$\begin{aligned} \psi(\lambda s + (1 - \lambda)t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \psi_n(\lambda s + (1 - \lambda)t) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda \psi_n(s) + (1 - \lambda) \psi_n(t) \\ &= \lambda \psi(s) + (1 - \lambda) \psi(t) \end{aligned}$$

が成り立つ. したがって  $\psi$  は凸関数である. さらに, 任意の  $t \in [0, 1]$  に対して  $\max\{1 - t, t\} \leq \psi(t) \leq 1$  が成り立つので  $\psi \in \Psi_2$  となる. したがって  $\Psi_2$  はコンパクトである.

(ii)  $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq 1/2 \leq \beta_1, \beta_2 \leq 1$  とすると

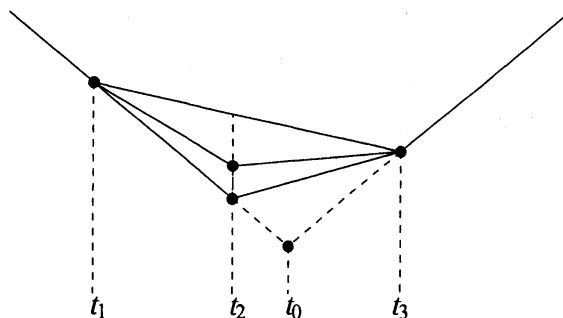
$$\begin{aligned} \|\psi_{\alpha_1, \beta_1} - \psi_{\alpha_2, \beta_2}\|_\infty &= \max\{ |(\psi_{\alpha_1, \beta_1} - \psi_{\alpha_2, \beta_2})(\alpha_0)|, |(\psi_{\alpha_1, \beta_1} - \psi_{\alpha_2, \beta_2})(\beta_0)| \} \\ &\leq 2 \max\{ |\alpha_1 - \alpha_2|, |\beta_1 - \beta_2| \} \end{aligned}$$

ここで,  $\alpha_0 = \max\{\alpha_1, \alpha_2\}$ ,  $\beta_0 = \max\{\beta_1, \beta_2\}$  とする. 実際に,  $\alpha_1 \leq \alpha_2$  のとき

$$\begin{aligned} |(\psi_{\alpha_1, \beta_1} - \psi_{\alpha_2, \beta_2})(\alpha_0)| &= |(\psi_{\alpha_1, \beta_1} - \psi_{\alpha_2, \beta_2})(\alpha_2)| \\ &\leq |\psi_{\alpha_1, \beta_1}(\alpha_2) - \psi_{\alpha_1, \beta_1}(\alpha_1)| + |\psi_{\alpha_1, \beta_1}(\alpha_1) - \psi_{\alpha_2, \beta_2}(\alpha_2)| \\ &\leq 2(\alpha_2 - \alpha_1) \end{aligned}$$

となる. 同様に  $\beta$  の場合も確かめることができる. これより  $E$  の閉性は容易に示される.

(iii) すべての区分的線形関数が  $\text{co}(E)$  に含まれることを示す.  $n \leq 3$  に対して  $n$  本からなるすべての区分的線形関数が  $\text{co}(E)$  に含まれることは容易にわかる.  $n \geq 3$  に対して  $n$  本からなるすべての  $\Psi_2$  の元が  $\text{co}(E)$  に含まれるとする. このとき  $n+1$  本からなる任意の関数  $\psi$  がまた  $\text{co}(E)$  に含まれることを示す.  $\psi$  の成分である 4 本の連続した線分をとる. その線分を左から  $m_1, m_2, m_3, m_4$  とする.  $l_i$  を  $m_i$  を含む直線全体とする.  $P_i = (t_i, \psi(t_i))$  を直線  $l_i$  と  $l_{i+1}$  の交点とする. ここで  $l_1, l_4$  の交点  $(t_0, l_1(t_0))$  は  $t_0 \in (t_1, t_3)$  であることに注意する.  $\psi^{(1)}$  を  $[t_1, t_3]$  の外側で  $\psi$  と一致し,  $[t_1, t_3]$  で, 線分  $[P_1, P_3]$  で与えられるものとする. さらに  $\psi^{(2)}$  を  $t_2 < t_0$  のとき  $[t_1, t_3]$  の外側で  $\psi$  と一致し,  $[t_1, t_3]$  で,  $[P_1, (t_2, l_1(t_2))]$  と  $[(t_2, l_1(t_2)), P_3]$  の 2 つの線分で与えられるものとする. また,  $t_2 \geq t_0$  のとき,  $[t_1, t_3]$  の外側で  $\psi$  と一致し,  $[t_1, t_3]$  で,  $[P_1, (t_2, l_4(t_2))]$  と  $[(t_2, l_4(t_2)), P_3]$  の 2 つの線分で与えられるものとする.



そのとき  $\psi^{(1)}$  と  $\psi^{(2)}$  は  $n$  本からなる線分であり,  $\psi$  はそれぞれの凸結合で表すことができる. したがって  $\psi \in \text{co}(E)$  が示せた.

最後に Dini の定理により区分的線形関数が  $\Psi_2$  で稠密であることがわかる. したがって,  $\Psi_2 = \overline{\text{co}}(E)$  を得る.  $\square$

## 参考文献

- [1] J. Alonse, *Any two-dimensional normed space is a generalized Day-James space*, J. Inequal. Appl., **2011**, 2011:2, 3 pp.
- [2] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical ranges II*, Cambridge University Press, Cambridge, 1973.
- [3] R. Grzaślewicz, *Extreme symmetric norms on  $\mathbb{R}^2$* , Colloq. Math. **56** (1988), 147–151.
- [4] R. Grzaślewicz, *Extreme norms on  $\mathbb{R}^n$* , Monatsh. Math. **110** (1990), 257–259.
- [5] N. Komuro, K.-S. Saito and K.-I. Mitani, *Extremal structure of the set of absolute norms on  $\mathbb{R}^2$  and the von Neumann-Jordan constant*, J. Math. Anal. Appl. **370** (2010), 101–106.
- [6] R. E. Megginson, *An introduction to Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, 183, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [7] W. Nilsrakoo and S. Saejung, *The James constant of normalized norms on  $\mathbb{R}^2$* , J. Inequal. Appl., **2006**, Art. ID 26265, 12 pp.
- [8] K.-S. Saito, K.-I. Mitani and N. Komuro, *A note on extreme norms on  $\mathbb{R}^2$* , Hokkaido Math. J. **42** (2013), 1–9.
- [9] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, *von Neumann-Jordan constant of absolute normalized norms on  $\mathbb{C}^2$* , J. Math. Anal. Appl., **244** (2000), 515–532. R. Tanaka and K.-S. Saito, *Characterization of regular norms on  $\mathbb{R}^2$* , Nihonkai Math. J., **24** (2013), 103–120.